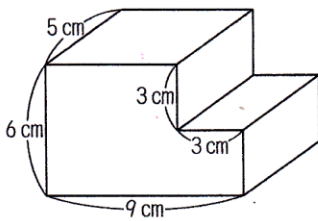


体積と表面積

①



(体積)



底面積は

$$6 \times 9 - 3 \times 3 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}$$

1本分は

$$45 \times 5 = 225 \text{ (cm}^3\text{)}$$

(表面積)

底面積 $\times 2$ +
側面積

大きな長方形と表す。
(高さ $\times$ 底面の周りの長さ)

・底面積 $\times 2$
 $\dots 45 \times 2 = 90 \text{ (cm}^2\text{)}$

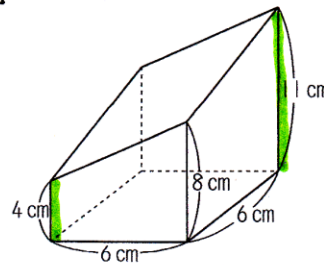
・側面積 $\rightarrow$ まわりの長さ $\times$ 高さ
 $\dots (6+9) \times 2 \times 5 = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$

表面積は

$$90 + 150 = 240 \text{ (cm}^2\text{)}$$

体積 $\dots 225 \text{ cm}^3$, 表面積 240 cm^2

③



左の立体を

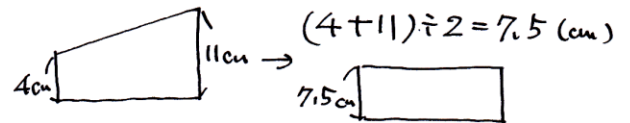
氷と考えると

解けて水になると

高さは平均になります。



高さは 向かい合う辺の長さの平均

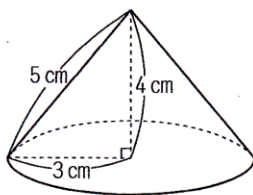


したがって1本分は

$$6 \times 6 \times 7.5 = 270 \text{ (cm}^3\text{)}$$

270 cm^3

②



(体積)

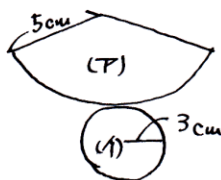
底面積 $\times$ 高さ $\times \frac{1}{3}$

$$3 \times 3 \times 3.14 \times 4 \times \frac{1}{3}$$

$$= 12 \times 3.14$$

$$= 37.68 \text{ (cm}^3\text{)}$$

(表面積)



(P) は側面積

半径 $\times$ 母線 $\times 3.14$

(半径 $\times$ 弧長 $\times \pi$)

$$3 \times 5 \times 3.14 = 15 \times 3.14$$

(I) は底面積

$$3 \times 3 \times 3.14 = 9 \times 3.14$$

したがって

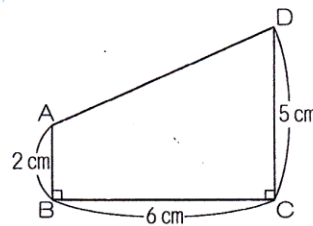
$$15 \times 3.14 + 9 \times 3.14$$

$$= (15+9) \times 3.14$$

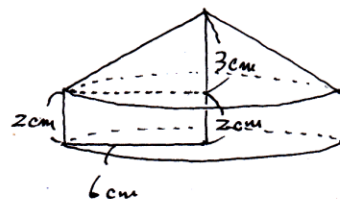
$$= 75.36 \text{ (cm}^2\text{)}$$

体積 $\dots 37.68 \text{ cm}^3$, 表面積 $\dots 75.36 \text{ cm}^2$

④



BCを軸に12回転させると
下のような立体になります。



円柱の上に円錐が
のった図形です。

・円柱の体積

$$\dots 6 \times 6 \times 3.14 \times 2$$

$$= 72 \times 3.14 \dots (P)$$

円錐の体積

$$\dots \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 3.14 \times 3$$

$$= 36 \times 3.14$$

$$\dots (I)$$

(P) + (I)

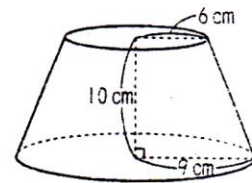
$$(72+36) \times 3.14$$

$$= 339.12 \text{ (cm}^3\text{)}$$

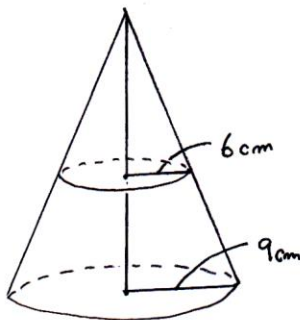
339.12 cm^3

体積と表面積

- 5 右の図の立体は、円すいを底面に平行な平面で切ったものです。この立体の体積は何 cm^3 ですか。円周率は3.14とします。



右の図を上にならしますと、円すいになります。



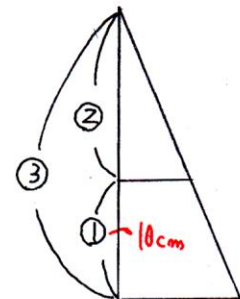
上の小さい円すいと大きい円すいの相似比は $6\text{cm} : 9\text{cm} = 2 : 3$ です。

↓
高さの比も $2 : 3$ になります

右の図より ① = 10 cm より

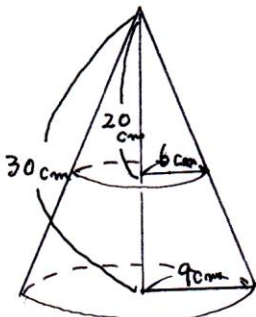
② = 20 cm

③ = 30 cm になります。



求める体積 = (大きい円すい) - (小さい円すい)

$$\begin{aligned} & 9 \times 9 \times 3.14 \times 30 \times \frac{1}{3} - 6 \times 6 \times 3.14 \times 20 \times \frac{1}{3} \\ &= (81 \times 30 - 36 \times 20) \times \frac{1}{3} \times 3.14 \\ &= (2430 - 720) \times \frac{1}{3} \times 3.14 \\ &= 1710 \times \frac{1}{3} \times 3.14 \\ &= 1789.8 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$



1789.8 cm^3

(別解)

相似比 → 体積比を出して計算します。

	(小さい円すい)	(大きい円すい)
相似比	2	3
体積比	$2 \times 2 \times 2$	$3 \times 3 \times 3$
	= 8	= 27

すると 円すい台 (下の部分) の体積比は $27 - 8 = 19$ です。

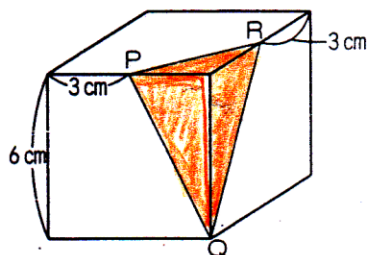
→ 小さい円すいが8のとこ、円すい台は19ですから、 $19 \div 8 = \frac{19}{8}$ (倍) になります。

$$\begin{aligned} & (\text{小さい円すい}) \times \frac{19}{8} \\ & 6 \times 6 \times 3.14 \times 20 \times \frac{1}{3} \times \frac{19}{8} \\ &= 30 \times 19 \times 3.14 \\ &= 570 \times 3.14 \\ &= 1789.8 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

1789.8 cm^3

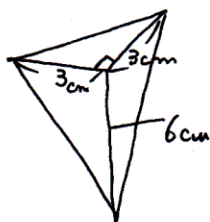
体積と表面積

- 6 右の図は1辺が6cmの立方体です。この立方体から、3点P, Q, Rを通る平面で三角すいを切り取りました。切り取った三角すいの体積と表面積を求めなさい。



(1) 1本積

三角すいになります。

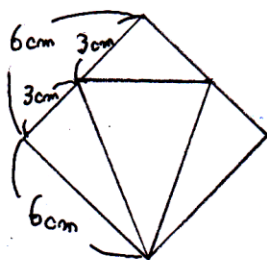
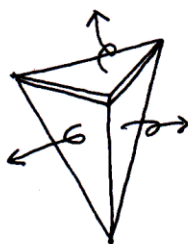


$$\begin{aligned} & 3 \times 3 \div 2 \times 6 \times \frac{1}{3} \\ &= 3 \times 3 \div 2 \times 2 \\ &= 9 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

1本積

$$9 \text{ cm}^3$$

(2) 表面積



6cm × 6cm の正方形の面積になります。

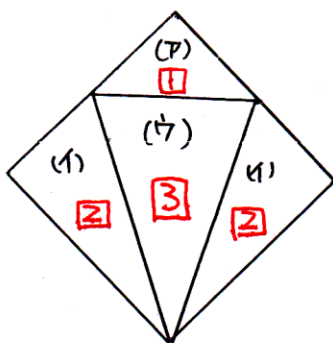
$$6 \times 6 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$36 \text{ cm}^2$$

(覚え得く)

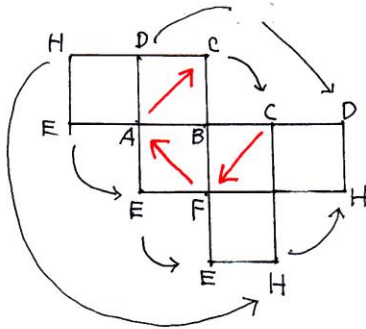
(ア) : (イ) : (ウ) の面積比は

1 : 2 : 3 になります。



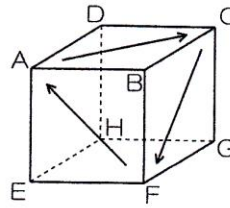
立方体

- ① (図1)は立方体で、表面に矢印が3本かいてあります。(図2)はこの立方体の展開図を表しています。この展開図に残りの矢印をかき入れなさい。

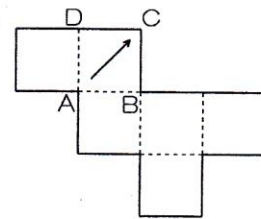


次に(図1)の
アルファベットの
矢印の向きに注意
しながら展開図
に書き入れていき
ます。

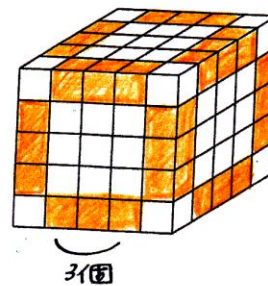
(図1)



(図2)



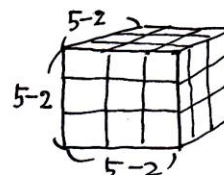
- ③ 同じ大きさの白色の立方体が125個あります。これを、右の図のように積み重ねてから6つの表面を赤くぬりました。これらをばらばらにしたときに、2面だけが赤色の立方体は何個ありますか。また、赤色の面がない立方体は何個ありますか。



3面

- 赤が2面の部分の個数は
31個が12ヶ所あるので
 $3 \times 12 = 36$ (個)

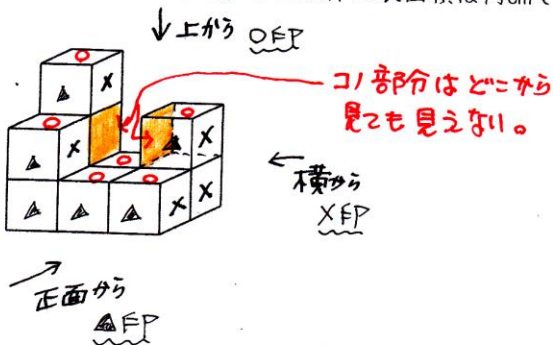
- 色が全くついていない立方体は
表面に出ていないものです。
(それ以外の)
たとえば、高さの立方体から1つ
すなわち2を引いた個数です。



$$(5-2) \times (5-2) \times (5-2) \\ = 3 \times 3 \times 3 \\ = 27 \text{ (個)}$$

2面だけが赤..36個, 赤の面がない..27個

- ② 1辺が2cmの立方体の積み木10個を、右の図のように積みました。この立体の表面積は何cm²ですか。



- 上から見える面 (OFP) ... 6面
- 横から見える面 (XFP) ... 5面
- 正面から見える面 (AFP) ... 6面
- どこからも見えない面 ... 2面

外から見える面の合計は
 $(6+5+6) \times 2 + 2 = 36$ 面

(1つの面の面積は $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$ より)

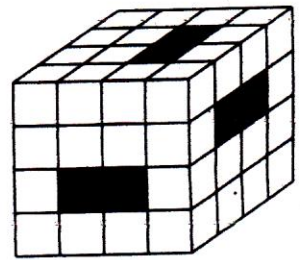
表面積は

$$4 \times 36 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$144 \text{ cm}^2$$

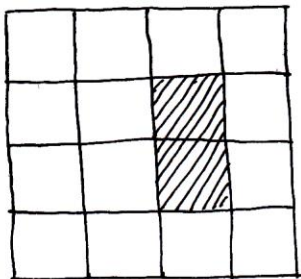
立方体

- 4 右の図は、1辺が1cmの立方体を64個組み合わせて作った立方体です。この立方体のかげの部分、反対側の面までくりぬきました。残った立体には1辺が1cmの立方体は何個ありますか。

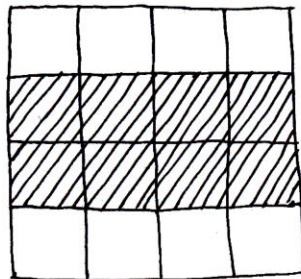


いちばん上の段から1段ずつ見方を書いていきます。

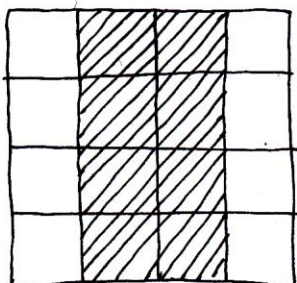
(上から1段目)



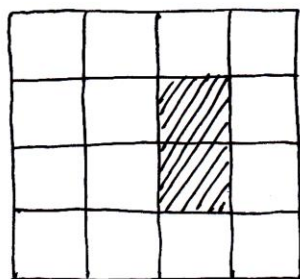
(上から2段目)



(上から3段目)



(上から4段目)



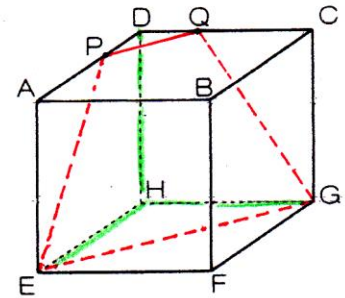
残った立体は白い部分になりますから
上から

$$14 + 8 + 8 + 14 = 44 \text{ (個)}$$

44個

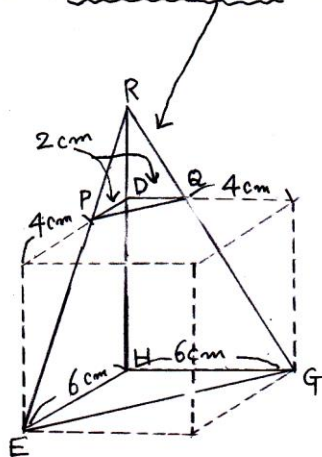
立方体

- 5 右の図は、1辺が6cmの立方体で、APとCQの長さは4cmです。この立方体を3点E、P、Qを通る平面で切りました。できた2つの立体のうち、点Hを含む方の立体の体積は何cm³ですか。

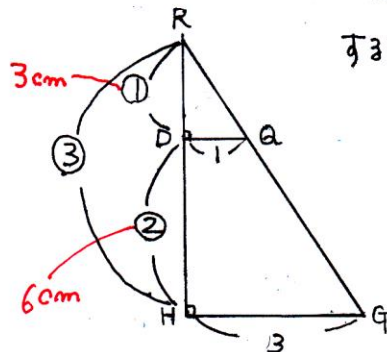


3点E、P、Qを通る平面は点Gを通り右の図のようになります。

Hを含む立体はD、P、Qを上の方に延長したときにできる三角すいから上の小さな三角すいを引いたものです。



三角形RDQとRHQは2:6=1:3の相似形となります。



するとRD:RHも①:③

$$DH = 3 - 1 = 2$$

DH=6cmですから

$$\textcircled{2} = 6\text{cm}$$

$$\textcircled{1} = 6 \div 2 = 3(\text{cm}) \cdots \text{RD}$$

RHの長さは3+6=9(cm)

(解法1)

(大きい三角すい) - (小さい三角すい)

$$\frac{6 \times 6 \div 2 \times 9 \times \frac{1}{3}}{\text{底面積} \quad \text{高さ}} - \frac{2 \times 2 \div 2 \times 3 \times \frac{1}{3}}{\text{底面積} \quad \text{高さ}}$$

$$= 54 - 2$$

$$= 52(\text{cm}^3)$$

$$52 \text{ cm}^3$$

(解法2)

上の図からわかるように(小さい三角すい)と(大きい三角すい)の相似比(辺の比)は1:3です。

↓
体積比は $1 \times 1 \times 1 : 3 \times 3 \times 3$

$$= \boxed{1} : \boxed{27}$$

↓
すると求める立体の体積比は

$$27 - 1 = \boxed{26} \text{ となります。}$$

すなわち 小さい三角すいの26倍です。

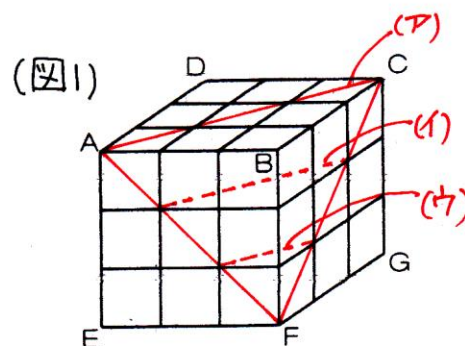
$$2 \times 2 \div 2 \times 3 \times \frac{1}{3} \times 26$$

$$= 2 \times 26$$

$$= 52(\text{cm}^3)$$

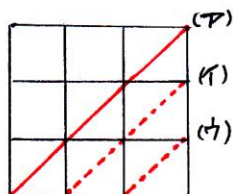
立方体

□6 同じ大きさの小さい立方体を27個積み重ねて、右の図のような大きい立方体を作りました。3つの頂点A、F、Cを通る平面でこの立体を切断しました。このとき、切断されたもとの小さい立方体の数は何個ですか。



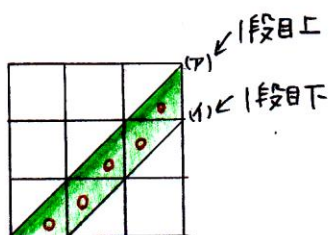
点A、F、Cを通る平面で立体を切断すると図1のようになります。

まじからみると切断された(ア)(イ)(ウ)は下のようになります。



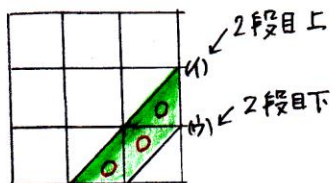
ここで1段ずつ切断された場所をチェックしていきます。

(1段目)



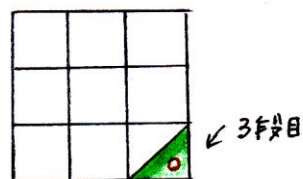
5ヵ所切断
されます。

(2段目)



3ヵ所切断
されます。

(3段目)



1ヵ所切断
されます。

以上より $5 + 3 + 1 = 9$ (個) 切断されます。

9 個

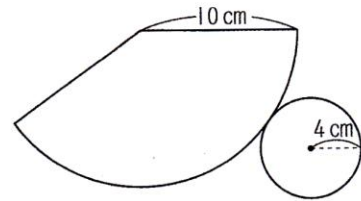
展開図・投影図

- ① 右の図は、円すいの展開図です。側面を表すおうぎ形の中心角は何度ですか。

$$\text{おうぎ形の中心角} = \frac{\text{半径}}{\text{母線}} \times 360^\circ$$

$$\text{公式より } \frac{4}{10} \times 360 = 144 (\text{度})$$

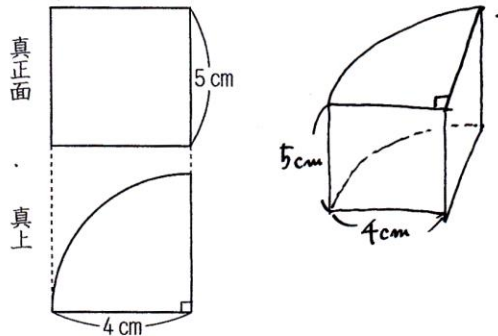
←覚える。



144度

- ② (図1)は、ある立体を真正面と真上から見た図です。この立体の体積と表面積を求めなさい。円周率は3.14とします。

(図1)



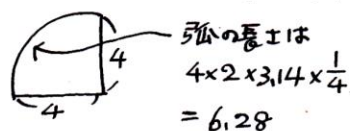
(体積)

底面が四分円で高さが5cmの柱体と考えます。
 $4 \times 4 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 5$
 $= 4 \times 5 \times 3.14$
 $= 62.8 \text{ (cm}^3\text{)}$

(表面積)

底面積 $\times 2$ + 側面積

側面積 = まわりの長さ $\times$ 高さ



まわりの長さ $\rightarrow 6.28 + 4 + 4 = 14.28$

• 側面積 $\rightarrow 14.28 \times 5 = 71.4 \text{ (cm}^2\text{)}$

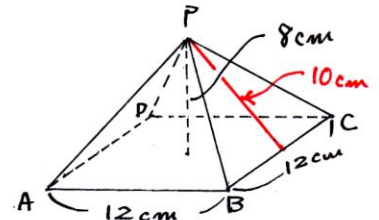
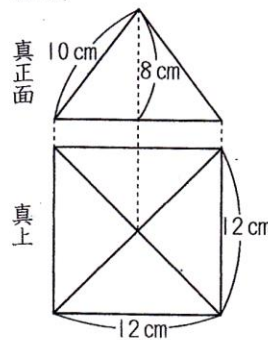
• 底面積 $\times 2 \rightarrow 4 \times 4 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 2$
 $= 25.12 \text{ (cm}^2\text{)}$

↓
 表面積 $\rightarrow 71.4 + 25.12$
 $= 96.52 \text{ (cm}^2\text{)}$

体積 $\rightarrow 62.8 \text{ cm}^3$, 表面積 $\rightarrow 96.52 \text{ cm}^2$

- ③ (図2)は、ある立体を真正面と真上から見た図です。この立体の体積と表面積を求めなさい。

(図2)



上の図のような四角すいになります。

(体積)

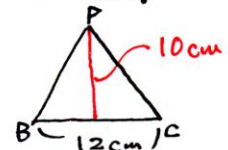
$$\text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

$$12 \times 12 \times 8 \times \frac{1}{3}$$

$$= 384 \text{ (cm}^3\text{)}$$

(表面積)

底面は正方形。
 側面は二等辺三角形が4面。



1つの三角形の面積は
 $12 \times 10 \div 2 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$

したがって求める表面積は

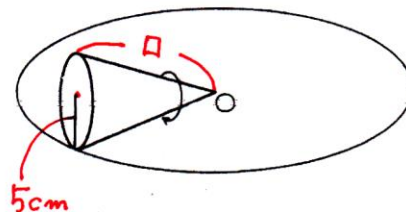
$$12 \times 12 + 60 \times 4$$

$$= 384 \text{ (cm}^2\text{)}$$

体積 $\rightarrow 384 \text{ cm}^3$, 表面積 $\rightarrow 384 \text{ cm}^2$

展開図・投影図

- 4 底面の円の半径が5cmの円すいを、頂点を中心にしてすべらないようにして机の上を転がしたところ、4回転してもとの位置にもどりました。この円すいの母線の長さは何cmですか。

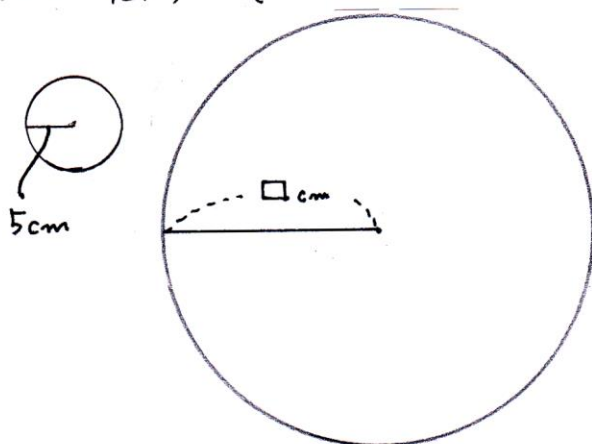


円すいの底面も 転がったあととも円です。

★ 母線の長さは転がったあとの半径となります。

円は相似形ですから相似比を使います。

(円すいの底面) (転がったあと)



円すいの底面が4回転して1周していますから 転がったあとの円周は4倍です。

円周の長さが 1:4

↓
半径の比も 1:4 です。

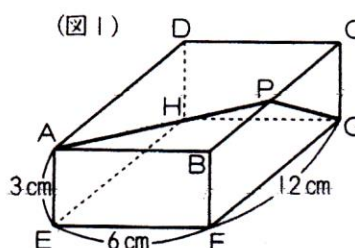
5cm □cm

$$\square = 4 \times 5 = 20 \text{ (cm)}$$

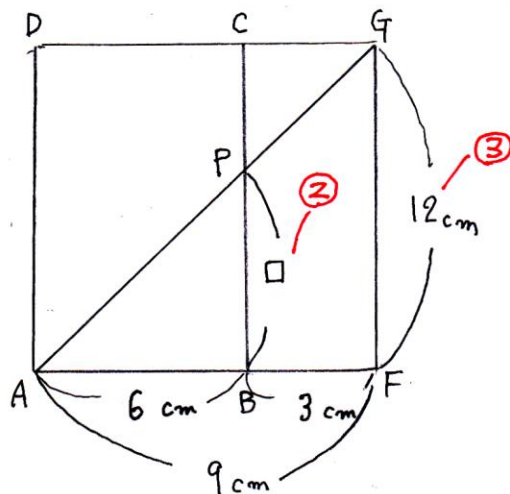
20 cm

- 5 次の問いに答えなさい。

- ① (図1)のような直方体で、AからGまでひもをピンと張ったときのBPの長さは何cmですか。



展開図を書きます。



三角形PABと三角形GAFは相似形です。

AB=6cm. AF=9cm より

相似比は 6:9 = ②:③

12cm

$$\square = 2 \times 4 = 8 \text{ (cm)} \dots \text{BPの長さ}$$

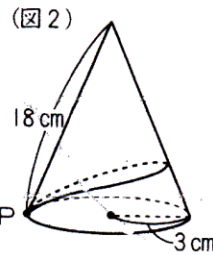
8 cm

展開図・投影図

- ② (図2)のような円すいで、底面の円周上の点Pから、側面上にひもをピンと張って1周したときの長さは何cmですか。

最短きり。

円すいを展開します。



最短きりは
下の図のPP'と
なります。

ここでおうぎ形の中心角を
求めます。

$$\text{中心角} = \frac{\text{半径}}{\text{母線}} \times 360^\circ \quad \text{より}$$

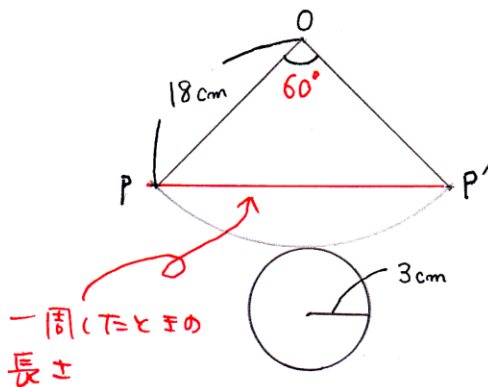
$$\text{中心角} = \frac{3}{18} \times 360 = 60^\circ$$

中心角が 60° の
二等辺三角形は
正三角形です。



PP' は
18 cm と
なります。

18 cm



- 6 右の図は、1辺が2 cmの立方体を積み重ねた立体を、正面、真上、右横から見たものです。この立体の体積が最も大きいとき、その体積は何cm³ですか。また、最も小さいとき、その体積は何cm³ですか。

真上から見た図に数を書き入れていきます。



(体積が最も大きくなるとき)

(P)			
3	2	2	3 ←
2	2	2	2 ←
2	2	2	2 ←

(右横)

3 2 2
↑ ↑ ↑

(正面)

(P) 以外には全て2が入ります。... 19個

(体積が最も小さいとき)

(例)

(P)			
3	1	1	3 ←
1	2	1	2 ←
1	1	2	2 ←

(右横)

3 2 2
↑ ↑ ↑

(正面)

1個数は13個

「2個見える」ということは、その列のどこかに1か所は2があるということです。

(左の図は1例です。)

1つの立方体の体積は
 $2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (cm}^3\text{)}$ より

最大とき $8 \times 19 = 152 \text{ (cm}^3\text{)}$

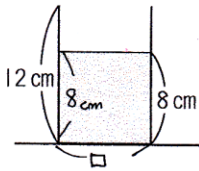
最小とき $8 \times 13 = 104 \text{ (cm}^3\text{)}$

152 cm³, 104 cm³

底面積の変化

1

(図1)



(図2)

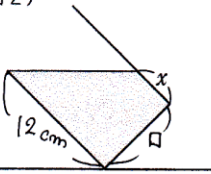
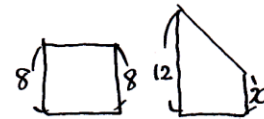


図1と図2の口の長さは同じなので、図形を台形と考え、上底と下底の長さを比べます。



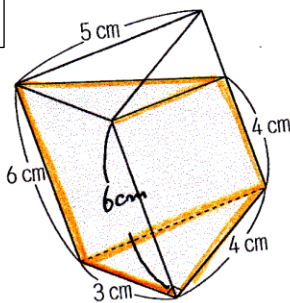
$$8 + 8 = 12 + x$$

$$x = 16 - 12$$

$$= 4 \text{ (cm)}$$

$$4 \text{ cm}$$

2



このまま水面を元に戻すと水面は平らになります。

(平均)

水面の高さは3つの辺の平均より $(6 + 6 + 4) \div 3 = \frac{16}{3} \text{ (cm)}$

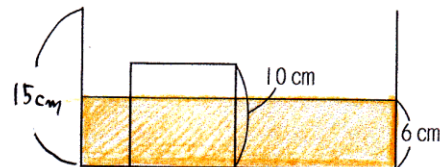
$$\begin{aligned} \text{したがって水の体積は} \\ 3 \times 4 \div 2 \times \frac{16}{3} \\ = 32 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$32 \text{ cm}^3$$

③ 高さ 15 cm の直方体の容器に水が 3.5 cm の深さまで入っています。この容器に、1 辺が 10 cm の立方体のおもりを 1 個しずめると、水の深さは 6 cm になりました。

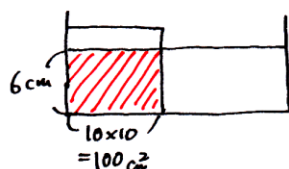
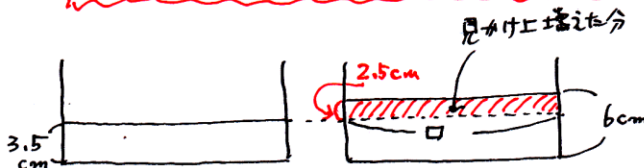
① この容器の底面積は何 cm^2 ですか。

② この容器に同じおもりをもう 1 個しずめると、水の深さは何 cm になりますか。



①

見かけ上 増えた水の体積は、水中のおもりの体積に等しい。



水中のおもりの体積は $10 \times 10 \times 6 = 600 \text{ (cm}^3\text{)}$
底面積

したがって

$$2.5 \times \square = 600$$

$$\square = 600 \div 2.5$$

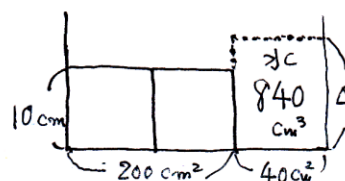
$$= 240 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$240 \text{ cm}^2$$

②

水の体積は

$$240 \times 3.5 = 840 \text{ (cm}^3\text{)}$$



おもりの2個分の底面積は

$$100 \times 2 = 200 \text{ (cm}^2\text{)}$$

水がある部分の底面積

$$240 - 200 = 40 \text{ (cm}^2\text{)}$$

水の高さは (Δ)

$$840 \div 40 = 21 \text{ (cm)} > 10 \text{ cm} \dots \text{おもりの高さ}$$

これより おもりは完全に沈んでしまうことがわかります。

水中のおもりの体積は $200 \times 10 = 2000 \text{ cm}^3$

この分見かけ上 増える

$$\square \text{ は } 2000 \div 240$$

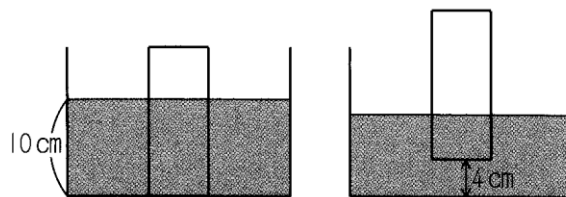
$$= 8 \frac{1}{6} \text{ (cm)} \text{ とこの分増える。}$$

$$\text{したがって } 3.5 + 8 \frac{1}{6} = 11 \frac{5}{6} \text{ (cm)}$$

$$11 \frac{5}{6} \text{ cm}$$

底面積の変化

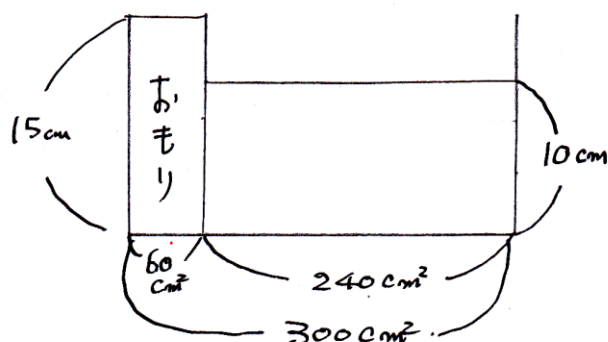
- 4 底面積が 300 cm^2 で、高さが 15 cm の直方体の容器に水が入っています。この容器に底面積が 60 cm^2 で、高さが 15 cm の直方体のおもりを底までまっすぐしずめたところ、水の深さが 10 cm になりました。



- ① おもりを入れる前の容器の水の深さは何 cm ですか。
- ② このおもりをまっすぐ 4 cm 引き上げたとき、水の深さは何 cm になりますか。

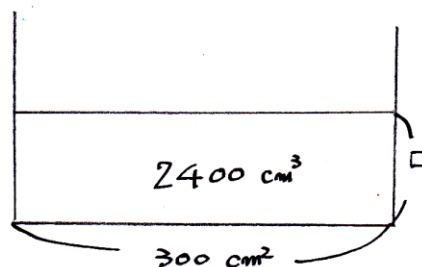
おもりを左に寄せて図を書くに分かりやすい。

①



おもりの底面積が 60 cm^2 なので
水の入っている部分の底面積は
 $300 - 60 = 240\text{ cm}^2$

↓
水の量は $240 \times 10 = 2400\text{ cm}^3$
おもりを入れる前

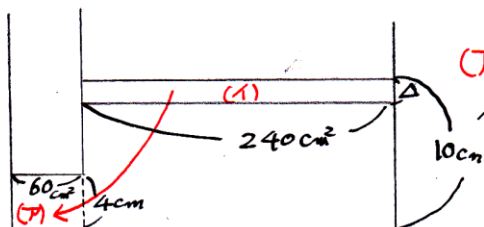


$$\square = 2400 \div 300 = 8\text{ (cm)}$$

8 cm

②

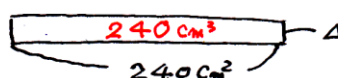
おもりを 4 cm 引き上げる。



(ア)の部分に水が入ってきます。

入ってくる水の量 $60 \times 4 = 240\text{ cm}^3$

(ア) = (イ) ... (イ)の水が(ア)に入る。



$$\Delta = 240 \div 240 = 1\text{ cm}$$

水の深さは 10 cm から 1 cm 下がるので
 $10 - 1 = 9\text{ (cm)}$ となります。

9 cm